О фрактальном анализе хаотических временных рядов.

Дубовиков Михаил Михайлович

Директор по стратегии

ИНТРАСТ
управляющая
компания

Фракталы

Определение размерности (*F. Hausdorff*, 1919)

(для компактного множества в произвольном метрическом пространстве)

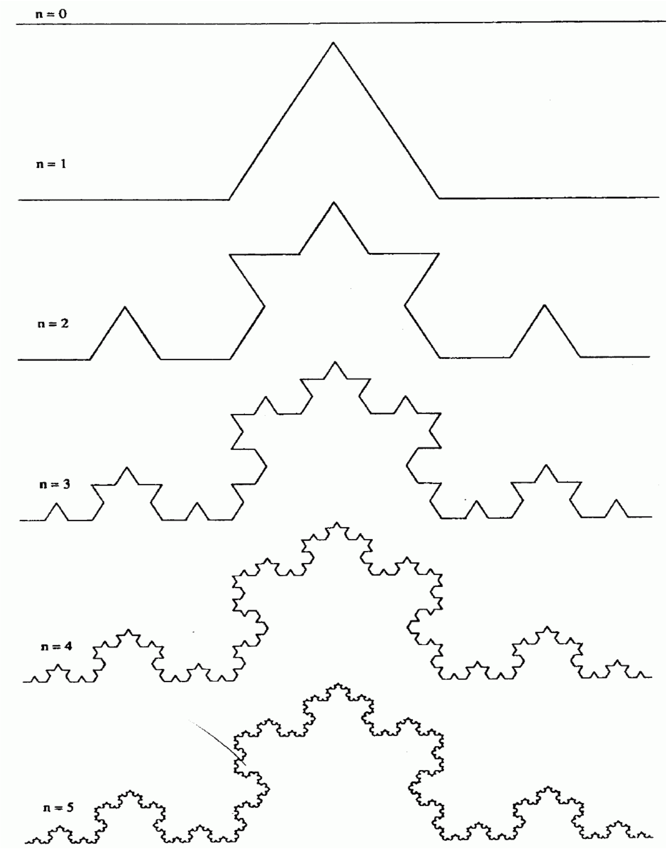
$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln (1/\delta)},$$

где $N(\delta)$ *– минимальное число шаров радиуса* δ, *покрывающих исходное множество.*

Мотивация: $N(\delta) \sim (1/\delta)^D$ (*D=1,2,3*)

Фракталы

Кривая Коха. Внутренняя размерность.



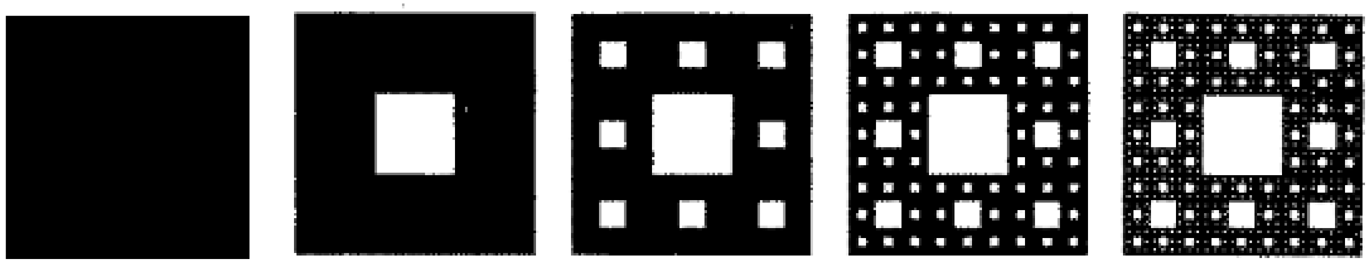
$$\text{при} \;\; \delta = (1/3)^n,$$

$$N(\delta) = 4^n$$

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$$

Фракталы

Ковер Серпинского. Клеточная размерность.

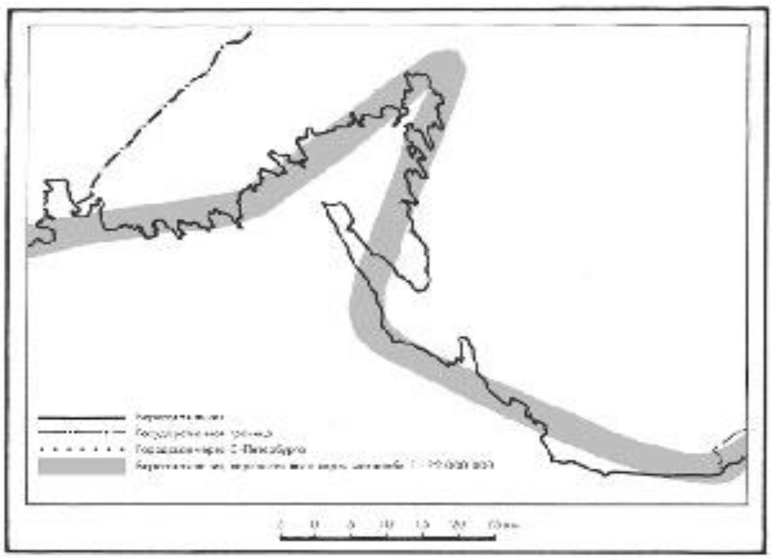


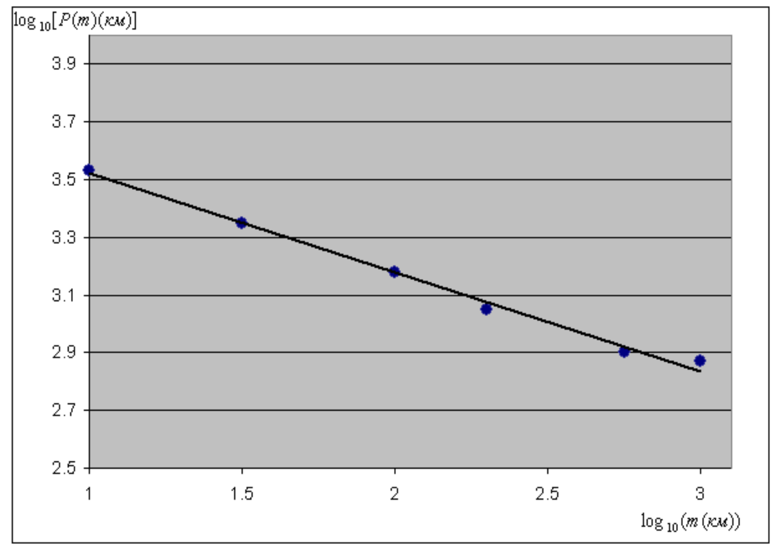
$$\textit{при}\ \ \delta = (1/3)^n, \qquad N(\delta) = 8^n$$

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.89$$

Фракталы

Береговая линия Британии (*L.F. Richardson*, 1961)





$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha} \qquad P(\delta) = N(\delta)\delta \qquad N(\delta) \sim \delta^{-(\alpha+1)}$$

$$D = \alpha + 1 = 1{,}24$$

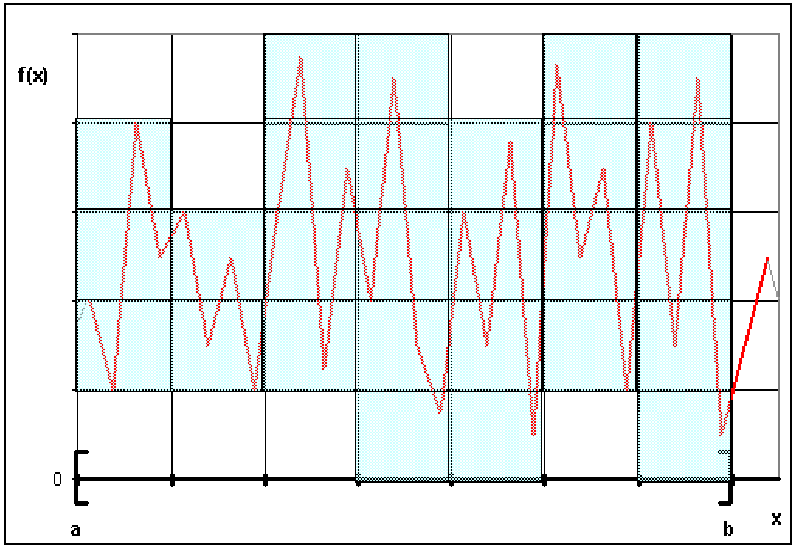
Фракталы

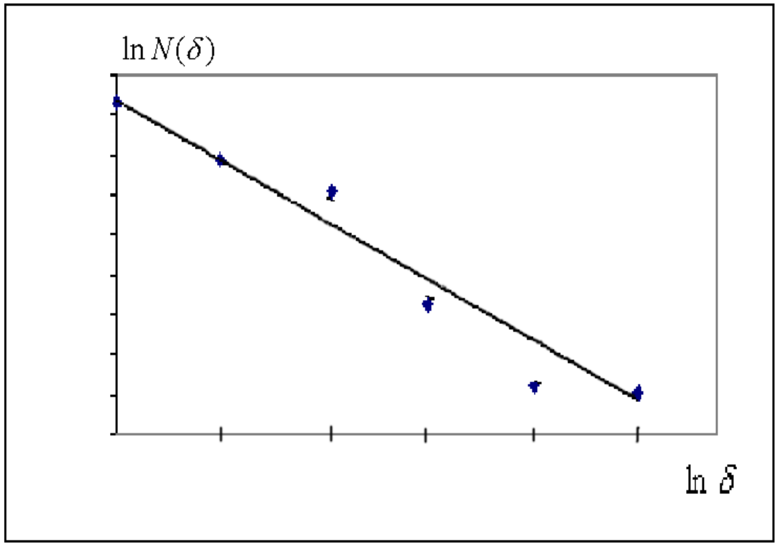
Определение (*B. Mandelbrot):*

Фрактал *– это множество, для которого хаусдорфова размерность D строго больше его топологической размерности D_T*

Фракталы

Финансовые временные ряды. Клеточная размерность.

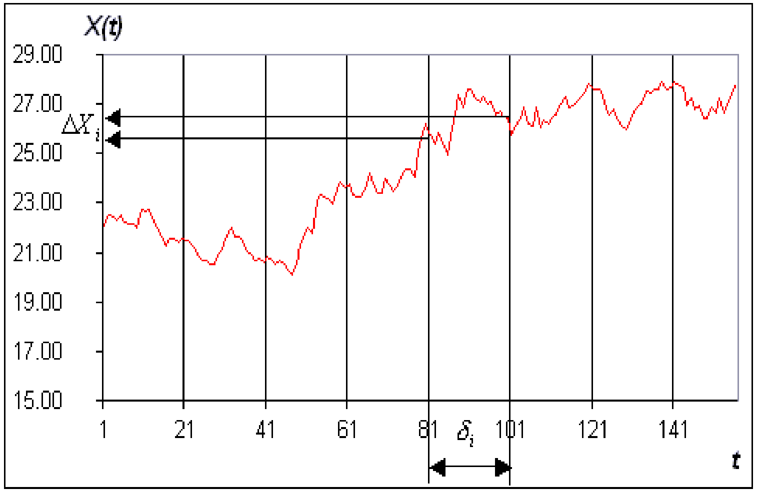


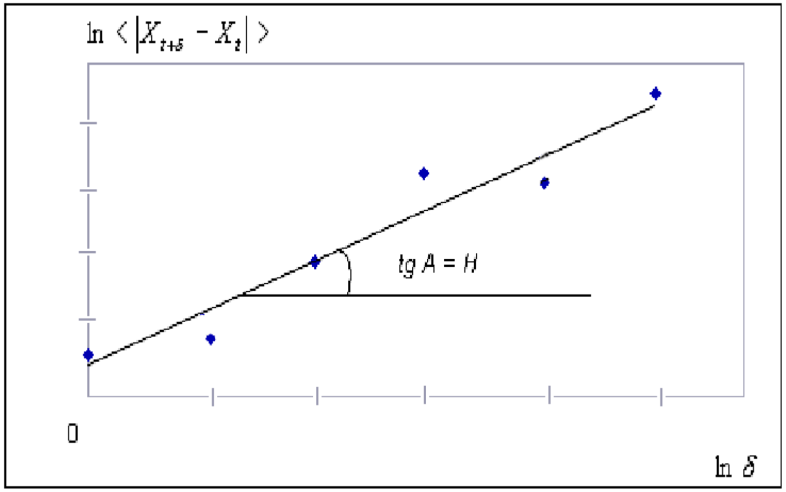


$$N(\delta) \sim \delta^{-D}$$

Фракталы

Финансовые временные ряды. Показатель Херста H





$$<|\Delta X(\delta)|>=<|X_{t+\delta}-X_t|>\sim\delta^H$$

Для гауссовых случайных процессов

D=2-H

Фракталы

Финансовые временные ряды. Показатель Херста H

Для обобщенного броуновского движения в системе единиц, где $\sigma = 1$ *и* $\mathrm{X_H}(0) = 0$, *нормированная функция корреляций прошлых приращений с будущими*

$$\mathrm{C(t)} = \frac{< -X_H(-t) X_H(t) >}{< X_H^2(t) >} = 2^{2H-1}$$

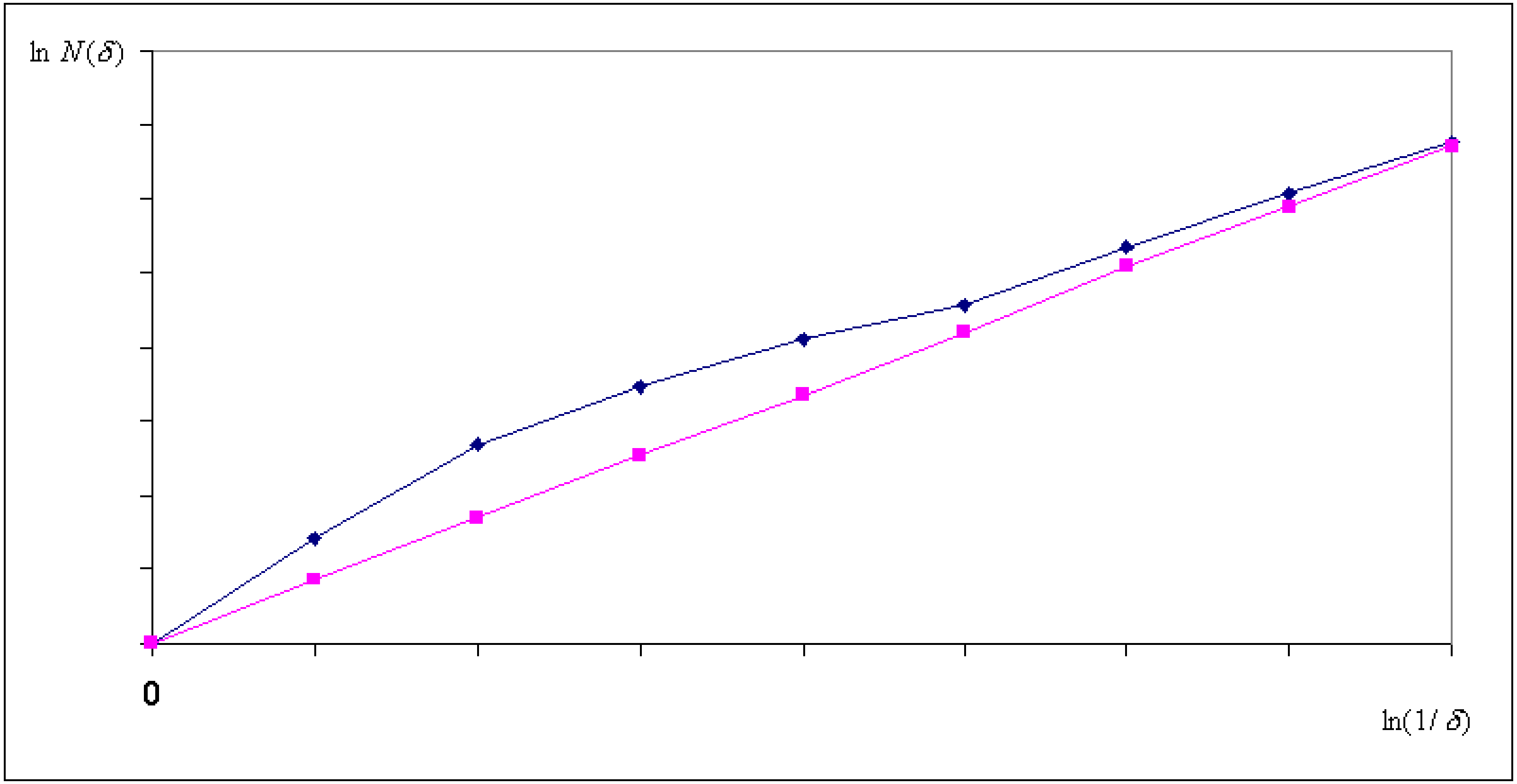
При $\mathrm{H} = 0{,}5$ корреляция отсутствует.

При $\mathrm{H} > 0{,}5$ корреляция положительна, т. е. положительное приращение в прошлом означает в среднем положительное приращение в будущем, и наоборот.

При $\mathrm{H} < 0{,}5$ *корреляция отрицательна, т. е. положительное приращение в прошлом означает* в среднем *отрицательное приращение в будущем, и наоборот.*

Фракталы

Сравнение результатов использования различных аппроксимаций для модельных фракталов



Фракталы

Финансовые временные ряды.

Асимптотика для площади покрытий.

$$N(\delta) \sim (1/\delta)^D \Rightarrow S(\delta) \sim \delta^{2-D},$$

$$\textit{при}\ \ \delta \to 0$$

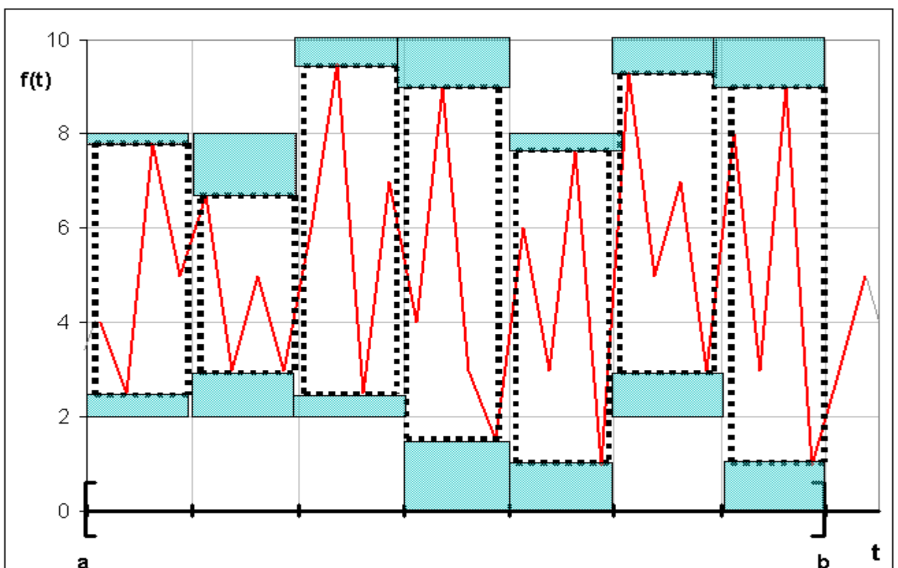
Фракталы

Финансовые временные ряды.

Размерность минимального покрытия.

Индекс фрактальности μ.

Для функции f(t), определенной на [a,b] введем равномерное разбиение отрезка $\omega_n = [a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b]$, *где* $\mathrm{t_i} - t_{i-1} = \delta = (b-a)/n \ (\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n})$
и рассмотрим минимальное покрытие графика f(t). Тогда:



$$S_\mu(\delta) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\delta)\delta \sim \delta^{2-D},$$
$$\text{при} \quad \delta \to 0.$$

Здесь A_i – *амплитуда* f(t) на i-м интервале

Фракталы

Финансовые временные ряды.

Индекс фрактальности μ.

Для функции f(t), определенной на [a,b] введем равномерное разбиение отрезка $\omega_n = [a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b],\ где\ \mathrm{t_i} - t_{i-1} = \delta = (b-a)/n\ \ (\mathrm{i} = 1,2,..., \mathrm{n})$

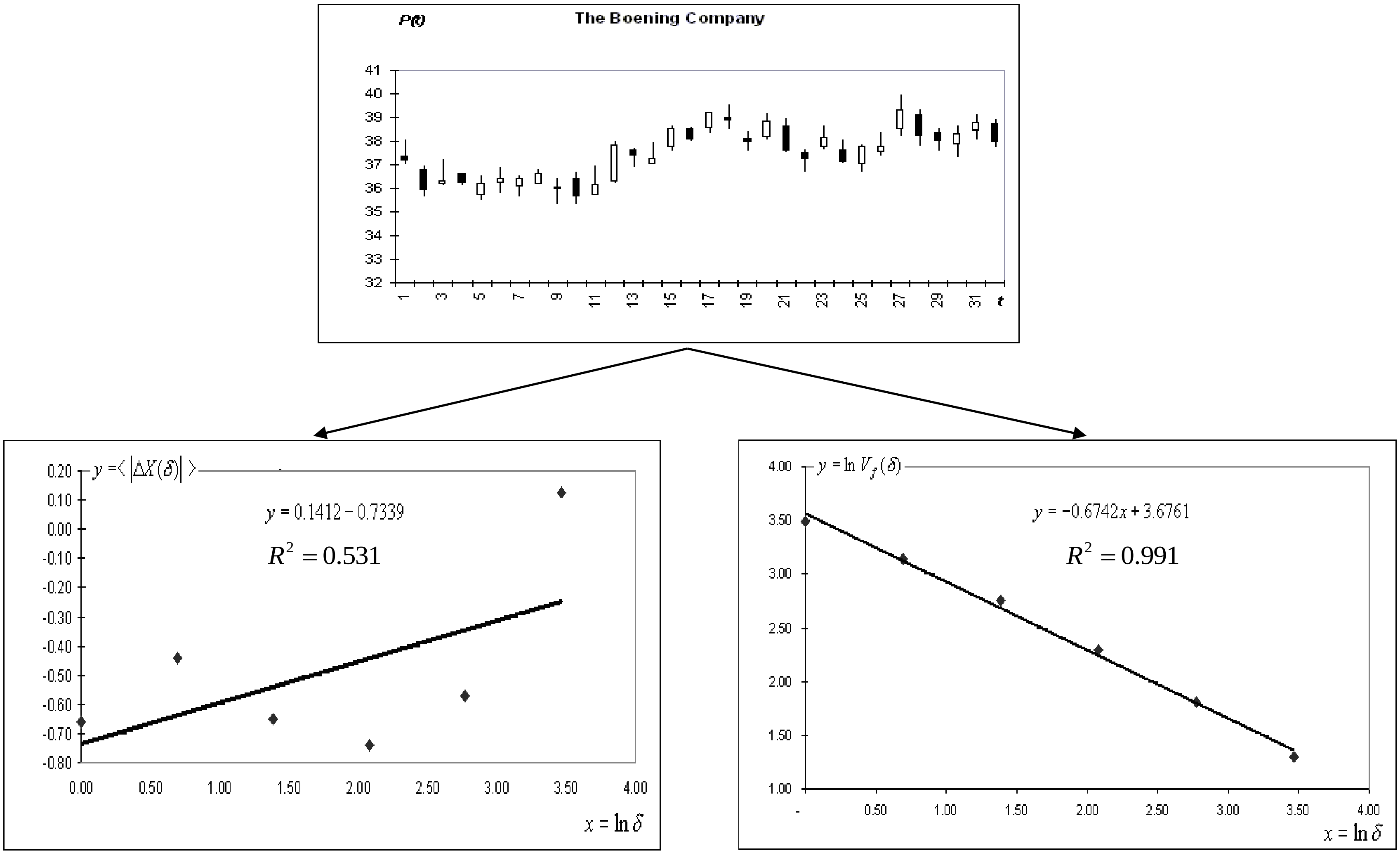
Обозначим: $$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i(\delta)$$

Тогда, если D - хаусдорфова размерность f(t), то

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu},$$

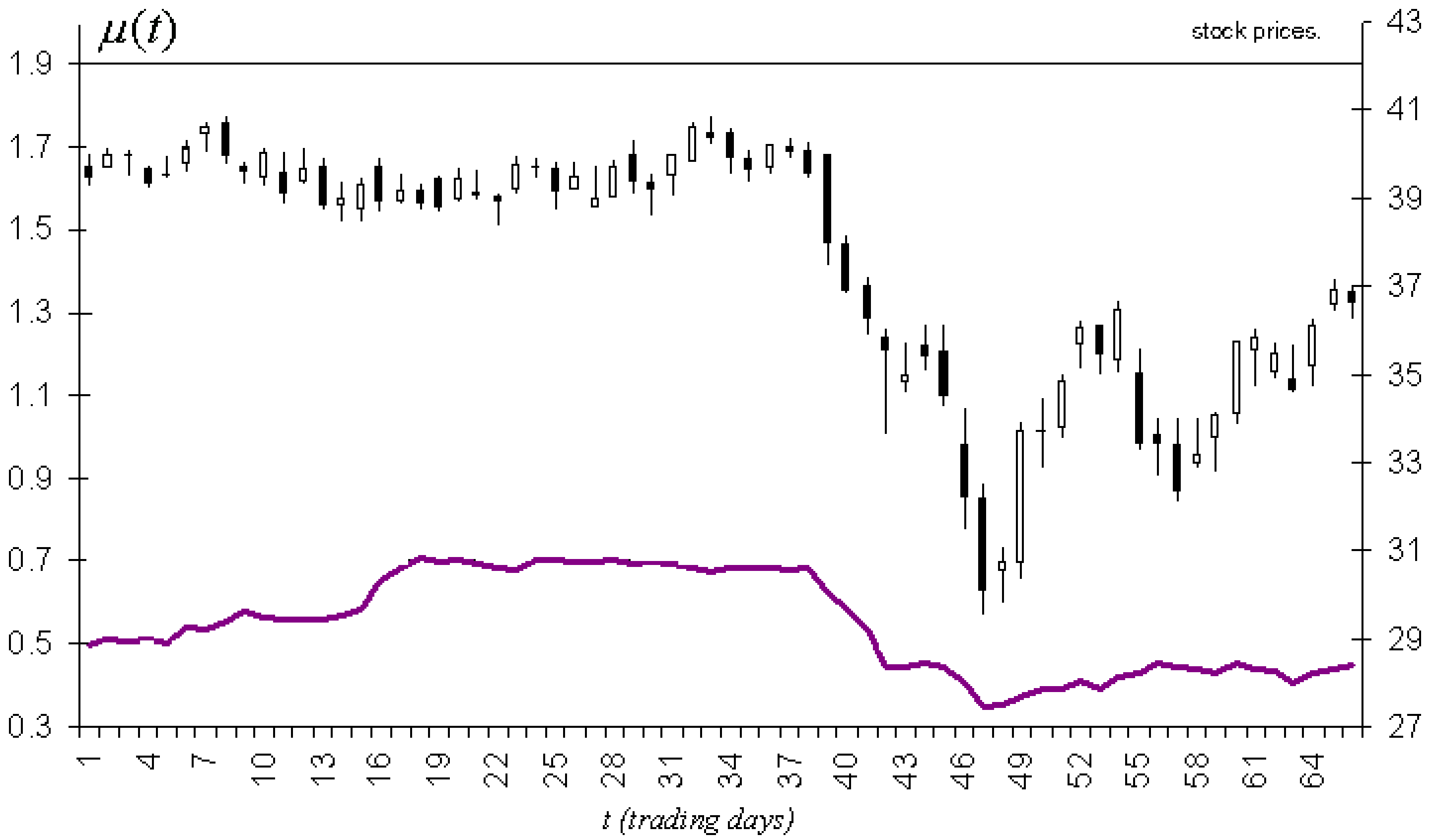
где $$\mu = D - 1 \equiv D - D_T$$

Фрактальный анализ финансовых временных рядов.
Быстрый выход на степенную ассимптотику.



Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

Типичное поведение ряда и функции μ_t



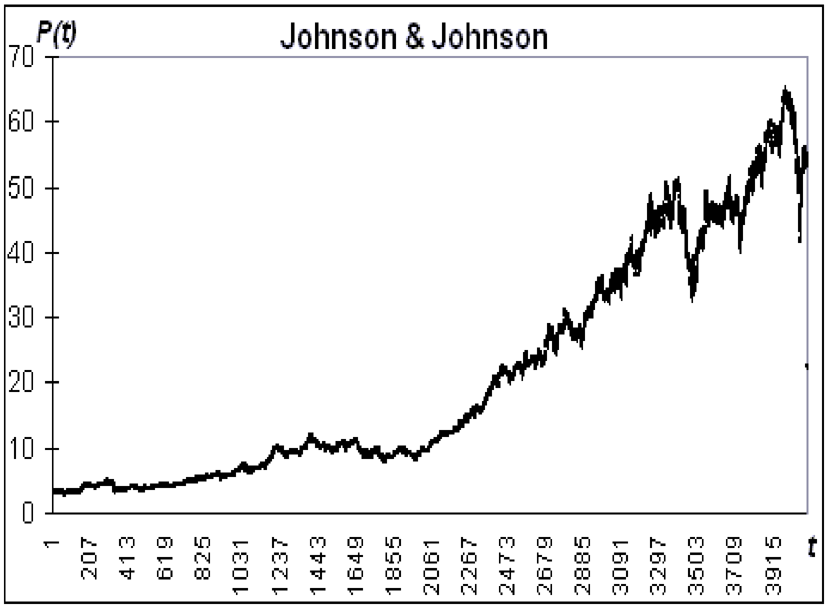
Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

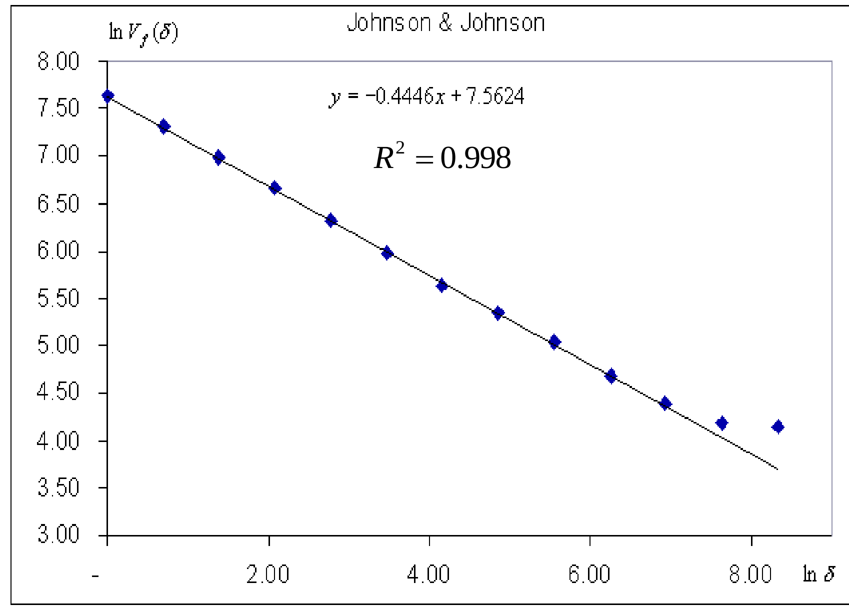
Доли основных состояний для некоторых акций на американском фондовом рынке.

Временной ряд цен	**Броуновское движение**	**Тренд**	**Флэт**
Alcoa Inc	23 %	43 %	34 %
Boeing Corp	24 %	37 %	39 %
IBM	25 %	39 %	36 %
Microsoft Corp	26 %	36 %	38 %
Exxon Mobile Corp	15 %	50 %	35 %

Фрактальный анализ финансовых временных рядов.

Быстрый выход на степенную ассимптотику.





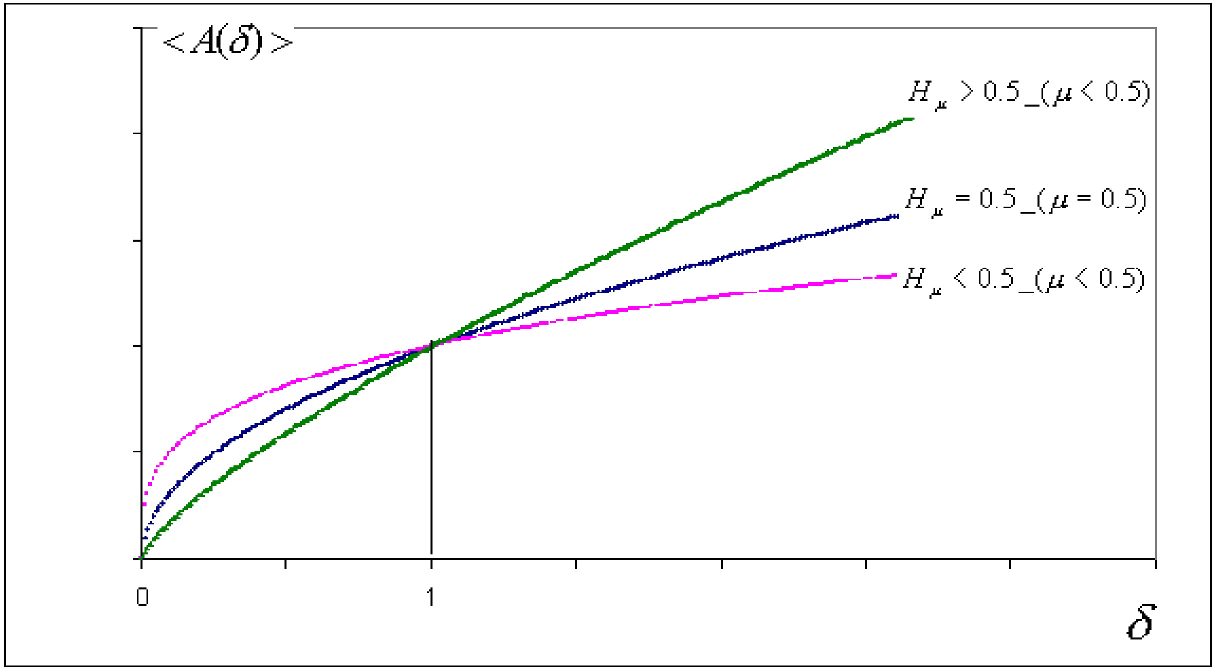
Типичная диаграмма для вычисления μ при длине исходного ряда 4096 дней:

Эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных.

Введем $< A(\delta) > \equiv V_f(\delta)/n$

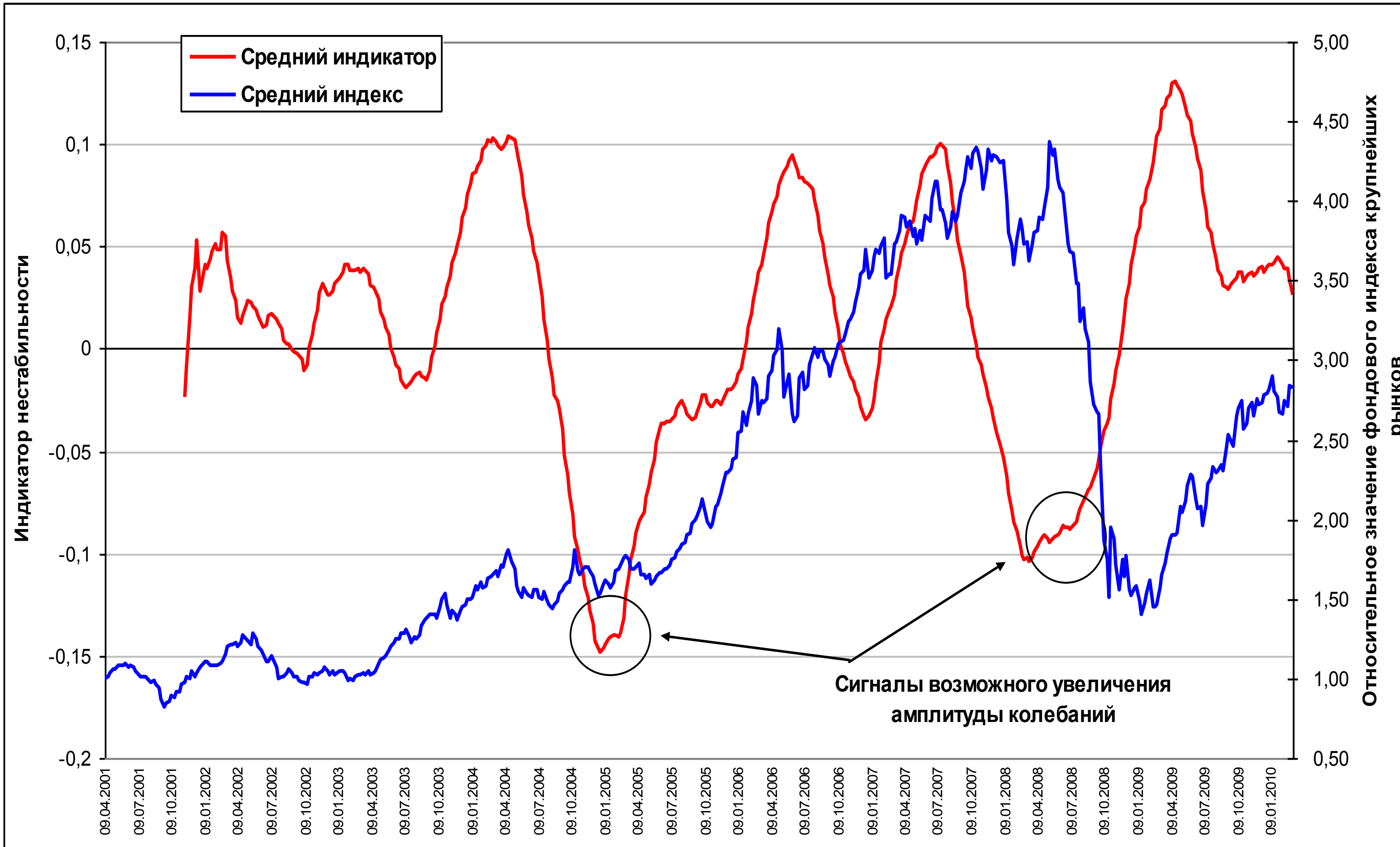
$$1/n \sim \delta \quad \Rightarrow \quad < A(\delta) > \sim V_f(\delta)\delta \sim \delta^{1-\mu} \equiv \delta^{H_\mu},$$

где $H_\mu = 1 - \mu$



Эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных.

Индикатор Старченко.



Фракталы

«Существуют многочисленные явления, в которых через определенное время разрушается любой мыслимый порядок. Но сколь бы хаотичной не становилась жизнь, на сколь бы мелкие осколки ни разбивалась всякая регулярность, одна мощная крепость остается незыблемой, гордо возвышаясь над турбулентным хаосом. Эта крепость – ***самоподобие****, инвариантность относительно изменения масштаба, или скейлинга».*

Manfred R. Schroeder

Литература:

1. Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Dubovikov M.S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series // Physica. 2004. A 339. P. 591 – 608

2. Dubovikov M.M., Starchenko N.S. Variation index and its applications to analysis of fractal structures // Sci. Almanac Gordon. 2003. № 1. P. 1 – 30

3. Bachelier L. Theory of Speculation (Translation of 1900 French edn) / P.H. Cootner (Ed.) // The Random Character of Stock Market Prices, The MIT Press, Cambridge. 1964. P. 17 – 78.

4. Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // J. Business. 1963. 36. P. 394 – 419.

5. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman. San Francisco, 1982.

ИНТРАСТ
УПРАВЛЯЮЩАЯ
КОМПАНИЯ

Спасибо за внимание

Дубовиков
Михаил Михайлович